Exercice 1

Mettre sous forme d'une fraction irréductible :

1) $\dfrac{3}{5}+\dfrac{7}{15}$

2) $\dfrac{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}{\frac{5}{6}+\frac{1}{3}}$

3) $(1-\dfrac{1}{4})\times(\dfrac{1}{4}+1)$

4) $\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\frac{1}{2}}}$

Exercice 2

Développer et simplifier :

1) $(3x^2-2)(2x^3-2x+1)$

2) $(3x+4y)^2$

3) $(3x^2-2x-3)(-4x^3-x^2+1)$

4) $(x-1)(x^n+x^{n-1}+\cdots+x+1)$

Exercice 3

Factoriser :

1) $4x+8x^2+2xy$

2) $9+6x+x^2$

3) $(2x+1)^2+(3x-2)(2x+1)$

4) $-20x+25x^2+4$

5) $50-8x^2$

Exercice 4

Simplifier sous une seule fraction :

1) $\dfrac{2}{x+1}+\dfrac{1}{x(x+1)}$

2) $-1+\dfrac{1}{x(1-x^2)}-\dfrac{2}{1-x^2}$

3) $\dfrac{-1}{x+1}-\dfrac{2x}{1-x^2}$

4) $\left(\dfrac{x+1}{1-x}\right)^2-\dfrac{2x}{(1-x)(x^2-x)}+\dfrac{2}{1-x}$

Exercice 5

Écrire aussi simplement que possible (en particulier en ayant un dénominateur entier) :

1) $\dfrac{3}{\sqrt{2}}$

2) $\dfrac{3}{\sqrt{8}}$

3) $\dfrac{17}{\sqrt{50}}$

4) $\dfrac{1}{2+\sqrt{5}}$

5) $\dfrac{2-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$

6) $\sqrt{(1-\sqrt{3})^2}$

7) $\sqrt{x^2}$, où $x\in\mathbb{R}$

Exercice 6

Simplifier :

1) $\dfrac{2^{-3}\times 16^3}{8^4}$

2) $\left(\dfrac{27^4}{3^5\times 9^{-2}}\right)^2$

3) $\dfrac{a^{n^2}}{a^n}$

4) $(a^n)^n-a^{n^2}$

5) $\dfrac{32\times 8^{n-1}}{2^{2n+2}-4^n}$

6) $\dfrac{5^n\times 12^{2n}}{10^n\times 6^{4n}}$

Exercice 7

1) Pour tout $x>0$, simplifier $\sqrt{\dfrac{x^{n+2}+x^2}{x^{n+1}+x}}$.

2) Pour tout $n\in\mathbb{N}$, simplifier $\dfrac{(8^{n+1}+8^n)^2}{(4^n-4^{n-1})^3}$.

Exercice 8

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes en donnant l'ensemble des solutions $\mathcal{S}$:

1) $\dfrac{1}{2}x-1=2$

2) $7(2x+4)-8x=15x+1$

3) $3(2-4x)=4(x-1)+2$

4) $(2x+3)(x-1)=4-x(3-2x)$

5) $4x^2+12x+9=(2x+1)^2+8x$

6) $-3x+1>2$

7) $3x+1<-2x+2$

8) $x+1\geq -\frac{1}{2}x-3$

9) $(2x+1)^2-x^2-3<(x+2)(x-2)+2x(x+2)$

10) $(2x-1)^2+5x<4x^2+x+7$

Exercice 9

Résoudre les systèmes d'équations suivants :

1) $\begin{cases} x & +2y & =1\\ 3x & +4y & =13\end{cases}$

2) $\begin{cases} 2x & +y & =16\\ x & -y & =5\end{cases}$

3) $\begin{cases} 3x & -6y & =-3\\ 2x & +2y & =2\end{cases}$

4) $\begin{cases} 3x & -4y & =-\sqrt{2}\\ 6x & +2y & =3\sqrt{2}\end{cases}$

5) $\begin{cases} 2x & & +z & =2\\ & -y & +z & =-1\\ & y & +2z & =1\end{cases}$

6) $\begin{cases} x & +2y & -z & =-3\\ 2x & -y & +z & =5\\ x & & -2z & =-3\end{cases}$

Exercice 10

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes en donnant l'ensemble des solutions $\mathcal{S}$:

1) $-x^2 - x + 2 = 0$
2) $x^2 - 6x + 9 = 0$
3) $2x^2 - x - 3 \geq 0$
4) $2x^2 - x < 1$
5) $-3x^2 + 2x > 2$
6) $-2x^2 + 5x < 2$
7) $\dfrac{x}{3} + \dfrac{3}{x} = \dfrac{5}{2}$

Exercice 11

Résoudre les équations suivantes sur $\mathbb{R}$.

1) $x^2 + (2\sqrt{2} - 2)x + 3 = 2\sqrt{2}$
2) $2x^2 - (\sqrt{6} + 2\sqrt{2})x + \sqrt{3} = 0$
3) $x - 4 = \sqrt{2x - 5}$
4) $x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = 0.$

Exercice 12

Soit $m \in \mathbb{R}$. On considère l'équation :

$$(m-2)x^2 + 2(m-4)x + (m-4)(m+2) = 0. \qquad (E_m)$$

1) Discuter suivant les valeurs de m l'existence et le nombre de solutions de l'équation (E_m).
2) Pour quelles valeurs de m l'équation admet-elle -1 comme solution ?

Exercice 13

Calculer en fonction de $\ln 2$, $\ln 3$ et $\ln 5$:

1) $\ln\left(\dfrac{81}{4}\right)$
2) $\ln\left(\dfrac{225}{162}\right)$
3) $\ln 1024$
4) $\ln 0.002$
5) $\ln\dfrac{1}{2} + \ln\dfrac{2}{3} + \cdots + \ln\dfrac{98}{99} + \ln\dfrac{99}{100}$

Exercice 14

Simplifier :

1) $e^{2x} \times e^{1-2x}$
2) $e^{-2x} - \dfrac{e^{2x} + 1}{e^{2x}}$
3) $e^{2\ln 3}$
4) $e^{-\ln 5 + 2\ln 7}$
5) $\ln e^{-\ln 3}$
6) $\ln \dfrac{e^5}{\sqrt{e^3}}$
7) $\ln \sqrt{e^{\frac{1}{2}\ln 3}}$

Exercice 15

Calculer les limites suivantes (en justifiant) :

1) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{-3x^2 + x - 6}{x^2 + 1}$
2) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{x^3 - x^2 + 1}{5x^2 - x + 2}$
3) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1 - 3x}{5x^2 - x + 2}$
4) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2 - 1} + x$
5) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2 - 1} + x$
6) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2 - x} + x$

Exercice 16

Déterminer l'ensemble de définition, l'ensemble de dérivabilité et la dérivée des fonctions f définies par :

1) $f(x) = \dfrac{1}{x}$
2) $f(x) = \dfrac{-2}{x^2}$
3) $f(x) = \dfrac{1}{(2 - 3x)^2}$
4) $f(x) = \dfrac{2x}{2 + x}$
5) $f(x) = \dfrac{-2}{(2 + x^2)^3}$
6) $f(x) = \dfrac{\ln x}{4}$
7) $f(x) = x^4 \cos x$
8) $f(x) = \dfrac{\sin x}{x^2 + 1}$
9) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$
10) $f(x) = \sin(x^4)$
11) $f(x) = \dfrac{e^{2x} + x}{\sin x}$
12) $f(x) = e^{3x^2 - 4x + 1}$

Exercice 17

Donner une primitive des fonctions f définies par :

1) $f(x) = x^4 - 5x^2 + \dfrac{7}{3}x + 2$
2) $f(x) = -\sin x + 2\cos x$
3) $f(x) = 2x - 4 + e^{3x}$
4) $f(x) = \sin(3x)e^{\cos 3x}$
5) $f(x) = -\dfrac{3}{x}$ où f est définie sur $\mathbb{R}_+^*$
6) $f(x) = -\dfrac{3}{x}$ où f est définie sur $\mathbb{R}_-^*$
7) $f(x) = -\dfrac{3x^2}{2x^3 + 1}$

Exercice 18

1) Calculer la dérivée de la fonction $f : x \longmapsto \sin x - x$ (après avoir justifié la dérivabilité de f).
2) En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\sin x \leq x$.

Exercice 19

1) Calculer la dérivée de la fonction $f : x \longmapsto e^x - x - 1$ (après avoir justifier la dérivabilité de f).

2) Faire un tableau de variations de f.

3) En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x \geq x + 1$.

Exercice 20

Déterminer les intégrales suivantes :

1) $\displaystyle\int_1^2 x^2 \mathrm{d}x$

2) $\displaystyle\int_0^1 x^2(x^3-1)^5 \mathrm{d}x$

3) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{x^2-4}\mathrm{d}x$

4) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{3x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$

5) $\displaystyle\int_1^2 t\ln t \,\mathrm{d}t$

6) $\displaystyle\int_1^4 \frac{\ln t}{\sqrt{t}} \,\mathrm{d}t$

7) $\displaystyle\int_1^e t^n \ln t \,\mathrm{d}t$, où $n \in \mathbb{N}$

8) $\displaystyle\int_0^1 (2t+1)e^{-2t}\mathrm{d}t$

Exercice 21

Mettre sous forme algébrique les complexes suivants :

1) $(3-i)^2$

2) $3i(1+i) - 5(2-3i)$

3) $\dfrac{1-2i}{3+i}$

4) $\dfrac{(1-i)^2}{2+2i}$

Exercice 22

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes en donnant l'ensemble des solutions $\mathcal{S}$:

1) $2z^2 + 6z + 5 = 0$

2) $\frac{3z+2}{z+1} = z + 3$

3) $z^4 + 5z^2 - 36 = 0$

Exercice 23

Mettre sous forme exponentielle les nombres suivants :

1) $z_1 = \dfrac{3}{1-i}$

2) $z_2 = \dfrac{(1+i)^3}{1-i} + \dfrac{(1-i)^4}{(1-i)^2}$

3) $z_3 = \dfrac{(\sqrt{6} - i\sqrt{2})(1+i)}{1-i}$

Exercice 24

Mettre sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

1) $(\sqrt{3} - i)^{11}$

2) $(-1+i)^{17}$

3) $(1 + i\sqrt{3})^{-42}$

Exercice 25

1) Calculer $\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^n$ (soit sous forme algébrique, soit sous forme exponentielle).

2) Trouver les entiers n tels que $(\sqrt{3}+i)^n$ est réel.

Exercice 26

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$, $u_1 = -1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n$.

1) Calculer u_2 et u_3.

2) Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_{n+1} - 2u_n$.
  - (a) Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique.
  - (b) Déterminer v_n en fonction de n.

3) Soit $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_n = \frac{u_n}{2^n}$.
  - (a) Montrer que $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique. Indication : on pourra calculer $w_{n+2} - w_{n+1}$ en fonction de $w_{n+1} - w_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
  - (b) Exprimer w_n en fonction de n et en déduire u_n en fonction de n.

Exercice 27

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier $n \geq 0$ par $u_0 = 5$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 3 - \dfrac{10}{u_n + 4}$.

1) Déterminer les valeurs exactes de u_1 et u_2.

2) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n > 1$.

3) Démontrer que pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{(1-u_n)(u_n+2)}{u_n+4}.$$

4) En déduire le sens de variation de la suite (u_n).

5) Justifier que (u_n) converge.

On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par : $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 2}$.

6) Démontrer que (v_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme v_0.

7) Exprimer v_n en fonction de n et en déduire que pour tout entier naturel n : $v_n \neq 1$.

8) Démontrer que pour tout entier naturel n :

$$u_n = \frac{2v_n + 1}{1 - v_n}.$$

9) En déduire la limite de la suite (u_n).

On considère l'algorithme ci-dessous :

$u \leftarrow 5$
$n \leftarrow 0$
Tant que $u \geq 1.01$, faire :
$n \leftarrow n+1$
$u \leftarrow 3 - \dfrac{10}{u+4}$
Fin Tant que

10) Après exécution de l'algorithme, quelle valeur est contenue dans la variable n ?

Exercice 28

Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$, où on définit $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k$ par $1 + 2 + \cdots + (n-1) + n$.

2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, où on définit $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2$ par $1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2 + n^2$.