Exercice 1

Mettre sous forme d'une fraction irréductible :

- 1) $\frac{3}{5} + \frac{7}{15}$
- 2) $\frac{\frac{3}{5} - \frac{2}{1}}{\frac{1}{6} + \frac{1}{3}}$
- 3) $(1 - \frac{1}{4}) \times (\frac{1}{4} + 1)$
- 4) $\frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}}$

Exercice 2

Développer et simplifier :

- 1) $(3x^2 - 2)(2x^3 - 2x + 1)$
- 2) $(3x + 4y)^2$
- 3) $(3x^2 - 2x - 3)(-4x^3 - x^2 + 1)$
- 4) $(x - 1)(x^n + x^{n-1} + \dots + x + 1)$

Exercice 3

Factoriser :

- 1) $4x + 8x^2 + 2xy$
- 2) $9 + 6x + x^2$
- 3) $(2x + 1)^2 + (3x - 2)(2x + 1)$
- 4) $-10x + 25x^2 + 4$
- 5) $50 - 8x^2$

Exercice 4

Simplifier sous une seule fraction :

- 1) $\frac{2}{x+1} + \frac{1}{x(x+1)}$
- 2) $-1 + \frac{1}{x(1-x^2)} - \frac{2}{1-x^2}$
- 3) $\frac{-1}{x+1} - \frac{2x}{1-x^2}$
- 4) $\left(\frac{x+1}{1-x}\right)^2 - \frac{2x}{(1-x)(x^2-x)} + \frac{2}{1-x}$

Exercice 5

Écrire aussi simplement que possible (en particulier en ayant un dénominateur entier) :

- 1) $\frac{3}{\sqrt{2}}$
- 2) $\frac{3}{\sqrt{8}}$
- 3) $\frac{17}{\sqrt{50}}$
- 4) $\frac{1}{2 + \sqrt{5}}$
- 5) $\frac{2 - \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}}$

6) $\sqrt{(1 - \sqrt{3})^2}$

7) $\sqrt{x^2}$, où $x \in \mathbb{R}$

Exercice 6

Simplifier :

- 1) $\frac{2^{-3} \times 16^3}{8^4}$
- 2) $\left(\frac{27^4}{3^5 \times 9^{-2}}\right)^2$
- 3) $\frac{a^{n^2}}{a^n}$
- 4) $(a^n)^n - a^{n^2}$
- 5) $\frac{32 \times 8^{n-1}}{2^{2n+2} - 4^n}$
- 6) $\frac{5^n \times 12^{2n}}{10^n \times 6^{4n}}$

Exercice 7

- 1) Pour tout $x > 0$, simplifier $\sqrt{\frac{x^{n+2} + x^2}{x^{n+1} + x}}$.
- 2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, simplifier $\frac{(8^{n+1} + 8^n)^2}{(4^n - 4^{n-1})^3}$.

Exercice 8Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes en donnant l'ensemble des solutions $\mathcal{S}$:

- 1) $\frac{1}{2}x - 1 = 2$
- 2) $7(2x + 4) - 8x = 15x + 1$
- 3) $3(2 - 4x) = 4(x - 1) + 2$
- 4) $(2x + 3)(x - 1) = 4 - x(3 - 2x)$
- 5) $4x^2 + 12x + 9 = (2x + 1)^2 + 8x$
- 6) $-3x + 1 > 2$
- 7) $3x + 1 < -2x + 2$
- 8) $x + 1 \geq -\frac{1}{2}x - 3$
- 9) $(2x + 1)^2 - x^2 - 3 < (x + 2)(x - 2) + 2x(x + 2)$
- 10) $(2x - 1)^2 + 5x < 4x^2 + x + 7$

Exercice 9

Résoudre les systèmes d'équations suivants :

- 1) $\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 3x + 4y = 13 \end{cases}$
- 2) $\begin{cases} 2x + y = 16 \\ x - y = 5 \end{cases}$
- 3) $\begin{cases} 3x - 6y = -3 \\ 2x + 2y = 2 \end{cases}$
- 4) $\begin{cases} 3x - 4y = -\sqrt{2} \\ 6x + 2y = 3\sqrt{2} \end{cases}$
- 5) $\begin{cases} 2x + z = 2 \\ -y + z = -1 \\ y + 2z = 1 \end{cases}$

$$6) \begin{cases} x + 2y - z = -3 \\ 2x - y + z = 5 \\ x - 2z = -3 \end{cases}$$

$$6) \ln \frac{e^5}{\sqrt{e^3}}$$

$$7) \ln \sqrt{e^{\frac{1}{2} \ln 3}}$$

Exercice 10

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes en donnant l'ensemble des solutions $\mathcal{S}$:

$$1) -x^2 - x + 2 = 0$$

$$2) x^2 - 6x + 9 = 0$$

$$3) 2x^2 - x - 3 \geq 0$$

$$4) 2x^2 - x < 1$$

$$5) -3x^2 + 2x > 2$$

$$6) -2x^2 + 5x < 2$$

$$7) \frac{x}{3} + \frac{3}{x} = \frac{5}{2}$$

Exercice 11

Résoudre les équations suivantes sur $\mathbb{R}$.

$$1) x^2 + (2\sqrt{2} - 2)x + 3 = 2\sqrt{2}$$

$$2) 2x^2 - (\sqrt{6} + 2\sqrt{2})x + \sqrt{3} = 0$$

$$3) x - 4 = \sqrt{2x - 5}$$

$$4) x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = 0.$$

Exercice 12

Soit $m \in \mathbb{R}$. On considère l'équation :

$$(m - 2)x^2 + 2(m - 4)x + (m - 4)(m + 2) = 0. \quad (E_m)$$

1) Discuter suivant les valeurs de m l'existence et le nombre de solutions de l'équation (E_m) .

2) Pour quelles valeurs de m l'équation admet-elle -1 comme solution ?

Exercice 13

Calculer en fonction de $\ln 2$, $\ln 3$ et $\ln 5$:

$$1) \ln \left(\frac{81}{4} \right)$$

$$2) \ln \left(\frac{225}{162} \right)$$

$$3) \ln 1024$$

$$4) \ln 0.002$$

$$5) \ln \frac{1}{2} + \ln \frac{2}{3} + \dots + \ln \frac{98}{99} + \ln \frac{99}{100}$$

Exercice 14

Simplifier :

$$1) e^{2x} \times e^{1-2x}$$

$$2) e^{-2x} - \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x}}$$

$$3) e^{2 \ln 3}$$

$$4) e^{-\ln 5 + 2 \ln 7}$$

$$5) \ln e^{-\ln 3}$$

Exercice 15

Calculer les limites suivantes (en justifiant) :

$$1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3x^2 + x - 6}{x^2 + 1}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - x^2 + 1}{5x^2 - x + 2}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - 3x}{5x^2 - x + 2}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 - 1} + x$$

$$5) \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 - 1} + x$$

$$6) \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 - x} + x$$

Exercice 16

Déterminer l'ensemble de définition, l'ensemble de dérivabilité et la dérivée des fonctions f définies par :

$$1) f(x) = \frac{1}{x}$$

$$2) f(x) = \frac{-2}{x^2}$$

$$3) f(x) = \frac{1}{(2 - 3x)^2}$$

$$4) f(x) = \frac{2x}{2 + x}$$

$$5) f(x) = \frac{-2}{(2 + x^2)^3}$$

$$6) f(x) = \frac{\ln x}{4}$$

$$7) f(x) = x^4 \cos x$$

$$8) f(x) = \frac{\sin x}{x^2 + 1}$$

$$9) f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$10) f(x) = \sin(x^4)$$

$$11) f(x) = \frac{e^{2x} + x}{\sin x}$$

$$12) f(x) = e^{3x^2 - 4x + 1}$$

Exercice 17

Donner une primitive des fonctions f définies par :

$$1) f(x) = x^4 - 5x^2 + \frac{7}{3}x + 2$$

$$2) f(x) = -\sin x + 2 \cos x$$

$$3) f(x) = 2x - 4 + e^{3x}$$

$$4) f(x) = \sin(3x)e^{\cos 3x}$$

$$5) f(x) = -\frac{3}{x} \text{ où } f \text{ est définie sur } \mathbb{R}_+^*$$

$$6) f(x) = -\frac{3}{x} \text{ où } f \text{ est définie sur } \mathbb{R}_-^*$$

$$7) f(x) = -\frac{3x^2}{2x^3 + 1}$$

Exercice 18

- 1) Calculer la dérivée de la fonction $f : x \mapsto \sin x - x$ (après avoir justifié la dérivabilité de f).
- 2) En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\sin x \leq x$.

Exercice 19

- 1) Calculer la dérivée de la fonction $f : x \mapsto e^x - x - 1$ (après avoir justifié la dérivabilité de f).
- 2) Faire un tableau de variations de f .
- 3) En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x \geq x + 1$.

Exercice 20

Déterminer les intégrales suivantes :

- 1) $\int_1^2 x^2 dx$
- 2) $\int_0^1 x^2(x^3 - 1)^5 dx$
- 3) $\int_0^1 \frac{x}{x^2 - 4} dx$
- 4) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{3x}{\sqrt{1-x^2}} dx$
- 5) $\int_1^2 t \ln t dt$
- 6) $\int_1^4 \frac{\ln t}{\sqrt{t}} dt$
- 7) $\int_1^e t^n \ln t dt$, où $n \in \mathbb{N}$
- 8) $\int_0^1 (2t + 1)e^{-2t} dt$

Exercice 21

Mettre sous forme algébrique les complexes suivants :

- 1) $(3 - i)^2$
- 2) $3i(1 + i) - 5(2 - 3i)$
- 3) $\frac{1 - 2i}{3 + i}$
- 4) $\frac{(1 - i)^2}{2 + 2i}$

Exercice 22

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes en donnant l'ensemble des solutions $\mathcal{S}$:

- 1) $2z^2 + 6z + 5 = 0$
- 2) $\frac{3z+2}{z+1} = z + 3$
- 3) $z^4 + 5z^2 - 36 = 0$

Exercice 23

Mettre sous forme exponentielle les nombres suivants :

- 1) $z_1 = \frac{3}{1 - i}$

- 2) $z_2 = \frac{(1 + i)^3}{1 - i} + \frac{(1 - i)^4}{(1 - i)^2}$
- 3) $z_3 = \frac{(\sqrt{6} - i\sqrt{2})(1 + i)}{1 - i}$

Exercice 24

Mettre sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

- 1) $(\sqrt{3} - i)^{11}$
- 2) $(-1 + i)^{17}$
- 3) $(1 + i\sqrt{3})^{-42}$

Exercice 25

- 1) Calculer $\left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i}\right)^n$ (soit sous forme algébrique, soit sous forme exponentielle).
- 2) Trouver les entiers n tels que $(\sqrt{3} + i)^n$ est réel.

Exercice 26

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$, $u_1 = -1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n$.

- 1) Calculer u_2 et u_3 .
- 2) Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_{n+1} - 2u_n$.
 - (a) Montrer que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique.
 - (b) Déterminer v_n en fonction de n .
- 3) Soit $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_n = \frac{u_n}{2^n}$.
 - (a) Montrer que $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite arithmétique. Indication : on pourra calculer $w_{n+2} - w_{n+1}$ en fonction de $w_{n+1} - w_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
 - (b) Exprimer w_n en fonction de n et en déduire u_n en fonction de n .

Exercice 27

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier $n \geq 0$ par $u_0 = 5$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 3 - \frac{10}{u_n + 4}$.

- 1) Déterminer les valeurs exactes de u_1 et u_2 .
- 2) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $u_n > 1$.
- 3) Démontrer que pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{(1 - u_n)(u_n + 2)}{u_n + 4}.$$

- 4) En déduire le sens de variation de la suite (u_n) .
- 5) Justifier que (u_n) converge.

On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par : $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 2}$.

- 6) Démontrer que (v_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme v_0 .

- 7) Exprimer v_n en fonction de n et en déduire que pour tout entier naturel $n : v_n \neq 1$.
- 8) Démontrer que pour tout entier naturel $n :$

$$u_n = \frac{2v_n + 1}{1 - v_n}.$$

- 9) En déduire la limite de la suite (u_n) .

On considère l'algorithme ci-dessous :

```

u ← 5
n ← 0
Tant que u ≥ 1.01, faire :
n ← n + 1
u ← 3 - 10 / (u + 4)
Fin Tant que
    
```

- 10) Après exécution de l'algorithme, quelle valeur est contenue dans la variable n ?

Exercice 28

On considère la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$f(x) = \ln \left(\frac{3x + 1}{x + 1} \right).$$

- 1) Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
- 2) Montrer que f est dérivable sur $[0, +\infty[$ et que pour tout nombre réel x positif ou nul, $f'(x) = \frac{2}{(x+1)(3x+1)}$.
En déduire que la fonction f est strictement croissante sur $[0, +\infty[$.

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 3$ et pour tout entier naturel $n, u_{n+1} = f(u_n)$.

- 3) Montrer que pour tout entier naturel $n : \frac{1}{2} \leq u_{n+1} \leq u_n$. On pourra utiliser la calculatrice et des valeurs approchées.
- 4) Démontrer que la suite (u_n) converge vers une limite strictement positive. On note ℓ la limite de la suite (u_n) .

- 5) Montrer que $f(\ell) = \ell$.

L'objectif est maintenant de déterminer une valeur approchée de ℓ . On introduit pour cela une fonction g définie sur $[0, +\infty[$ par $g(x) = f(x) - x$.

- 6) Montrer que g est dérivable sur $[0, +\infty[$ et que pour tout réel positif $x, g'(x) = \frac{-3x^2 - 4x + 1}{(x + 1)(3x + 1)}$.
- 7) En déduire que le tableau de variation de g est :

x	0	x_0	$+\infty$
$g(x)$	0	$g(x_0)$	$-\infty$

avec $x_0 = \frac{-2 + \sqrt{7}}{3} \approx 0.215$ et $g(x_0) \approx 0.088$ en arrondissant à 10^{-3} près.

- 8) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution strictement positive. On la note α .
- 9) Compléter l'algorithme ci-dessous afin que la dernière valeur prise par la variable x soit une valeur approchée de α par excès à 0.01 près.

```

x ← 0.22
Tant que ..... faire :
x ← x + 0.01
Fin Tant que
    
```

- 10) Donner alors la dernière valeur prise par la variable x lors de l'exécution de cet algorithme.
- 11) En déduire une valeur approchée à 0.01 près de la limite ℓ de la suite (u_n) .

Exercice 29

Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

- 1) $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$, où on définit $\sum_{k=1}^n k$ par $1 + 2 + \dots + (n-1) + n$.
- 2) $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, où on définit $\sum_{k=1}^n k^2$ par $1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2 + n^2$.