Pourquoi ce cahier et comment l'utiliser ?
Vous venez d'être admis(e) en prépa MPSI au lycée Ferdinand Foch, tout d'abord félicitations ! Ce cahier de vacances va vous permettre de bien préparer votre rentrée. La présentation de la physique change radicalement entre les études supérieures et le lycée. L'approche est davantage tournée vers la modélisation des phénomènes, ce qui induit une forte mathématisation de la physique. Autrement dit pour réussir en physique en MPSI/MP, il est indispensable de se familiariser avec le calcul, qui sera l'outil nécessaire à la description des phénomènes physiques. Être rapide en calcul, c'est traiter davantage de questions en un temps imparti et donc décrocher une meilleure école au concours. C'est aussi simple que cela. Et pour aller vite, il n'y a pas de secret : il faut s'entraîner. C'est l'objectif de ce cahier de vacances. Aucune question n'est difficile, ce qui compte n'est donc plus seulement de réussir la question, mais de la réussir le plus rapidement possible (évidemment sans calculatrice). Enfin, certain(e)s parmi vous seront tentés pour prendre de l'avance d'essayer d'aborder le nouveau programme seul(e)s et d'assimiler des notions nouvelles. Il s'agit d'une très mauvaise stratégie : nous avons l'année pour cela, mais nous n'aurons pas le temps de combler d'éventuelles lacunes du lycée. Profitez de l'été pour renforcer vos bases : lorsqu'on construit une maison, on ne commence pas à poser le toit avant d'avoir terminé les murs ...

Je vous demande de chercher le maximum d'exercices pour la rentrée sur un petit cahier à part, et de **ramener ce cahier le jour de la rentrée**. Les exercices qui suivent sont tirés d'un cahier de calcul d'entraînement à la prépa, rédigé par un collectif de collègues en mathématiques. J'ai récupéré quelques points dont nous aurons besoin en physique.

Il est fortement conseillé de travailler régulièrement (par exemple 3h par jour sur un mois) plutôt que de travailler 12h par jour la dernière semaine avant la rentrée. Il est en effet capital d'arriver reposé pour la rentrée. Dernière chose, il est absolument capital pour votre réussite de suivre et d'écouter les conseils précédents. Si vous avez des interrogations sur l'année à venir, n'hésitez pas à lire le document intitulé "Méthodologie de travail". Par dessus tout, prenez du plaisir à faire ces exercices simples d'entraînement. C'est lorsqu'on s'amuse qu'on apprend le mieux !

On rappelle ci-dessous quelques relations élémentaires indispensable à un bon démarrage en prépa. Plus vous serez familiers avec les notions ci-dessous, plus simple sera votre début d'année. N'hésitez pas à vous entraîner avec les questions marquées d'un crayon.

Dérivées usuelles

Fonction		Dérivée	Dérivabilité
x^n	$n \in \mathbb{Z}$	nx^{n-1}	$\mathbb{R}^*$
x^α	$\alpha \in \mathbb{R}$	$\alpha x^{\alpha-1}$	$\mathbb{R}_+^*$
$e^{\alpha x}$	$\alpha \in \mathbb{C}$	$\alpha e^{\alpha x}$	$\mathbb{R}$
a^x	$a \in \mathbb{R}_+^*$	$a^x \ln a$	$\mathbb{R}$
$\ln \lvert x \rvert$		$\dfrac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$
$\log_a x$	$a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$	$\dfrac{1}{x \ln a}$	$\mathbb{R}^*$
$\cos x$		$-\sin x$	$\mathbb{R}$
$\sin x$		$\cos x$	$\mathbb{R}$
$\tan x$		$1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\mathbb{R} \setminus \left\{ \dfrac{\pi}{2} + k\pi \;\middle\vert\; k \in \mathbb{Z} \right\}$

Rappelons que les formules précédentes se démontrent à partir de la définition de la dérivée comme limite d'un taux d'accroissement : si f est dérivable en $x = x_0$ alors la dérivée de la fonction en f en x_0 est donnée par

$$f'(x_0) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x = x_0) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(x_0 + \varepsilon) - f(x_0)}{\varepsilon}. \tag{1}$$

Rappelons enfin la très utile formule de dérivation d'une fonction composée. Soit f une fonction définie et dérivable sur un domaine $\mathcal{F}$ et à valeurs dans $\mathcal{D}$ et g une fonction dérivable sur $\mathcal{D}$. Alors la fonction $g \circ f$ est dérivable sur $\mathcal{F}$ et

$$(g \circ f)'(x) = f'(x) \times g'(f(x)). \tag{2}$$

Montrer que la dérivée de $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ s'écrit $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

Primitives usuelles

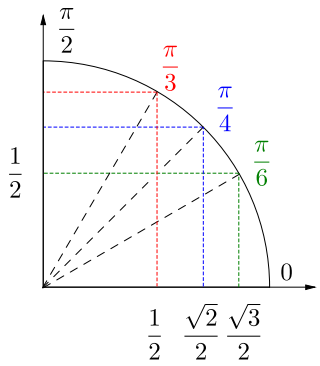
Fonction	Primitive	Intervalles
$\ln x$	$x(\ln x - 1)$	$]\,0\,;+\infty\,[$
$e^{\alpha x} \quad \alpha \in \mathbb{C}^*$	$\dfrac{1}{\alpha}e^{\alpha x}$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$-\cos x$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$\sin x$	$\mathbb{R}$
$\tan x$	$-\ln\lvert\cos x\rvert$	$\left]-\dfrac{\pi}{2}+k\pi\,;\dfrac{\pi}{2}+k\pi\right[$
$(x-x_0)^\alpha \quad x_0 \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{-1\}$	$\dfrac{(x-x_0)^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$]\,x_0\,;+\infty\,[$
$\dfrac{1}{x-a} \quad a \in \mathbb{R}$	$\ln\lvert x-a\rvert$	$]\,-\infty\,;a\,[\ ,\ ]\,a\,;+\infty\,[$

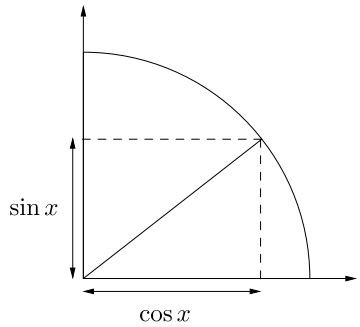
Trigonométrie

1 Premières propriétés

	$\sin x$	$\cos x$
Ensemble de définition	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
Période	2π	2π
Parité	impaire	paire
$f(\pi - x)$	$\sin x$	$-\cos x$
$f(\pi + x)$	$-\sin x$	$-\cos x$
$f\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$	$\cos x$	$\sin x$
$f\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$	$\cos x$	$-\sin x$

2 Valeurs remarquables





3 Formules

$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ (Pythagore)

$\cos^2 x = \dfrac{1}{1 + \tan^2 x}$

$$\boxed{\begin{aligned} \cos(a+b) &= \cos a \cos b - \sin a \sin b \\ \sin(a+b) &= \sin a \cos b + \sin b \cos a \end{aligned}}$$

$$\begin{aligned} \cos(a-b) &= \cos a \cos b + \sin a \sin b \\ \sin(a-b) &= \sin a \cos b - \sin b \cos a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos p + \cos q &= 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2} \\ \sin p + \sin q &= 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin p - \sin q &= 2 \sin \frac{p-q}{2} \cos \frac{p+q}{2} \\ \cos p - \cos q &= -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos 2x &= \cos^2 x - \sin^2 x \\ &= 2\cos^2 x - 1 \\ &= 1 - 2\sin^2 x \end{aligned} \qquad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x \qquad \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

Pour les formules, seules les deux encadrées en rouge sont à connaître par cœur. En revanche il est indispensable de savoir retrouver rapidement les autres.

Dessiner le cercle trigonométrique et savoir retrouver rapidement les “premières propriétés”.

En posant $a = \frac{p+q}{2}$ et $b = \frac{p-q}{2}$, redémontrer les 4 relations faisant intervenir p et q.

Nombres complexes

Il existe deux représentations équivalentes d'un nombre complexe. La forme algébrique $z = a+ib$ où $a = \mathrm{Re}(z)$ et $b = \mathrm{Im}(z)$, mais aussi la forme trigonométrique ou polaire $z = \rho e^{i\theta}$ où $\rho = |z|$ (module de z) et $\theta = \arg z$ (argument de z). Le lien entre les deux représentations est donné par les relations suivantes

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{a^2+b^2}, \\ \tan(\theta) = \frac{b}{a}, \end{cases} \qquad \text{ou encore} \qquad \begin{cases} a = \rho\cos(\theta), \\ b = \rho\sin(\theta). \end{cases} \tag{3}$$

Vérifier les relations précédentes à l'aide d'une représentation de z dans le plan complexe.

La très utile formule dite d'Euler est une conséquence des résultats précédents

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta). \tag{4}$$

D'où on déduit les expressions suivantes à retenir absolument :

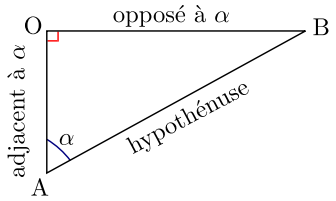
$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} \qquad \text{et} \qquad \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i} \tag{5}$$

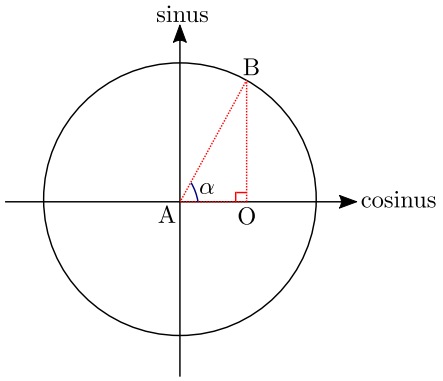
D'après les propriétés de l'exponentielle on en déduit la formule de Moivre

$$(e^{i\theta})^n = e^{i(n\theta)} \quad \Rightarrow \quad (\cos(\theta)+i\sin(\theta))^n = \cos(n\theta)+i\sin(n\theta). \tag{6}$$

Montrer en utilisant les relations précédentes que $\cos^3(x) = \frac{1}{4}(\cos(3x)+3\cos(x))$.

Géométrie et trigonométrie





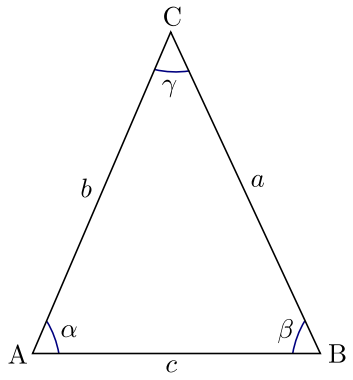
Dans un triangle OAB rectangle en O, l'angle α formé entre les côtés AO et AB (voir ci-dessus) est tel que :

$$\cos(\alpha) = \frac{OA}{AB}; \quad \sin(\alpha) = \frac{OB}{AB}; \quad \tan(\alpha) = \frac{OB}{OA}. \tag{7}$$

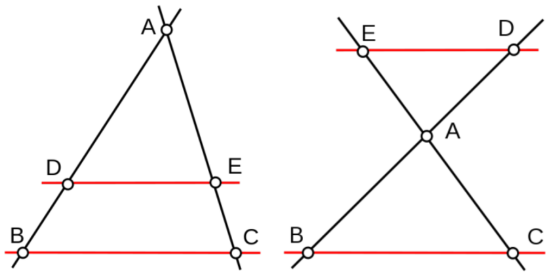
L'identité trigonométrique $\cos^2(\alpha)+\sin^2(\alpha) = 1$ est équivalente au théorème de Pythagore

$$OA^2 + OB^2 = AB^2. \tag{8}$$

Le cas particulier où $AB = 1$ (cercle unité) est à connaître : l'abscisse de B correspond à $\cos(\alpha)$ et l'ordonnée de B à $\sin(\alpha)$ (voir également la figure).



Pour le triangle quelconque ci-dessus, montrer en faisant intervenir des triangles rectangles que $\frac{\sin(\alpha)}{a} = \frac{\sin(\beta)}{b} = \frac{\sin(\gamma)}{c}$.

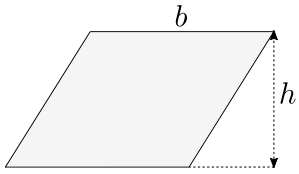


Le théorème de Thalès, pour les deux configurations (standard et papillon), s'écrit :

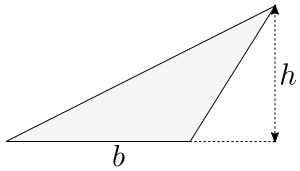
$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}. \tag{9}$$

Démontrer ce résultat à partir des relations trigonométriques.

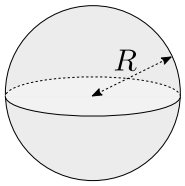
Surfaces, volumes



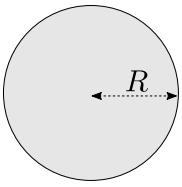
$S = bh$



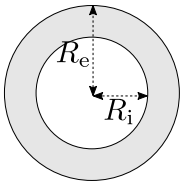
$S = bh/2$



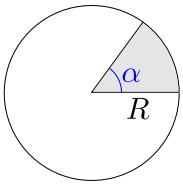
$S = 4\pi R^2$
$V = \frac{4}{3}\pi R^3$



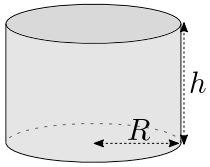
$S = \pi R^2$



$S = \pi(R_\mathrm{e} - R_\mathrm{i})^2$



$S = \frac{\alpha}{2\pi} \times \pi R^2$



$$\begin{aligned} S &= S_\mathrm{lat} + 2S_\mathrm{base} \\ &= 2\pi Rh + 2\pi R^2 \\ V &= \pi R^2 h \end{aligned}$$

♣ Exercice 1 : Fractions.

1. Simplifier les fractions suivantes : $\frac{27^{-1}\times 4^2}{3^{-4}\times 2^4}$ et $\frac{36}{25}\times\frac{15}{12}\times 5$.
2. En utilisant le calcul littéral et les identités remarquables, simplifier l'expression suivante : $\frac{1235\times 2469-1234}{1234\times 2469+1235}$.
3. Écrire sous la forme d'une fraction la plus simple possible l'expression $\frac{a^3-b^3}{(a-b)^2}-\frac{(a+b)^2}{a-b}$.
4. Simplifier en puissances de 10 les expressions suivantes : $\frac{(10^5\times 10^{-3})^5}{(10^{-5}\times 10^3)^{-3}}$ et $\frac{(10^3)^{-5}\times 10^5}{10^3\times 10^{-5}}$
5. Mettre sous la forme a^n l'expression $\frac{(30^4)^7}{2^{28}\times 5^{28}}$.
6. Simplifier au maximum l'expression $\frac{x^2}{x^2-x}+\frac{x^3}{x^3+x^2}-\frac{2x^2}{x^3-x}$.

♣ Exercice 2 : Développer, réduire, factoriser.

1. Développer, réduire et ordonner en un minimum d'étapes de calcul (idéalement on écrira directement le résultat après avoir tout calculé de tête) $(x-1)^3(x^2+x+1)$ et $(x^2+x+1)(x^2-x+1)$.
2. Factoriser l'expression $-(6x+7)(6x-1)+36x^2-49$.

♣ Exercice 3 : Nombres complexes.

Soit i le nombre complexe tel que $i^2=-1$.

1. Mettre sous forme algébrique ($a+ib$, où a et b sont deux réels) les nombres complexes suivants : $(3-2i)^2$, $(-4+i\sqrt{5})^3$, $(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})^3$. Déterminer ensuite leur module, leur argument et les représenter dans le plan complexe.
2. Mettre sous forme exponentielle ou trigonométrique ($re^{i\theta}$ où r et θ sont deux réels avec $r>0$) les nombres complexes suivants : $-5+i5\sqrt{3}$, $\mathrm{e}^{i\pi/3}+\mathrm{e}^{i\pi/6}$.

♣ Exercice 4 : Équation du second degré.

1. Résoudre mentalement les équations suivantes : $9x^2+6x+1=0$, $x^2+4x-5=0$, $3x^2-11x+8=0$.
2. En utilisant la somme et le produit des racines d'une équation du second degré, former l'équation du second degré admettant comme racines les nombres suivants : 9 et 13, puis -11 et 17.

♣ Exercice 5 : Exponentielle et logarithme.

Écrire les nombres suivants le plus simplement possible : $\exp(-2\ln 3)$, $\ln(\sqrt{e})$, $\ln(\sqrt{\exp(-\ln(e^2))})$.

♣ Exercice 6 : Trigonométrie.

Simplifier les expressions suivantes :

1. $\cos(\frac{\pi}{4})+\cos(\frac{3\pi}{4})+\cos(\frac{5\pi}{4})+\cos(\frac{7\pi}{4})$
2. $\cos^2(\frac{4\pi}{3})-\sin^2(\frac{4\pi}{3})$
3. $\sin(-x)+\cos(\pi+x)+\sin(\frac{\pi}{2}-x)$

♣ Exercice 7 : Dérivées, primitives.

1. Déterminer la dérivée des fonctions suivantes :
   (a) $f(x) = (x^2 - 2x + 6)\exp(2x)$
   (b) $f(x) = (3\cos(x) - \sin(x))^3$
   (c) $f(x) = \sin(\sqrt{x})$
   (d) $f(x) = \frac{2x^2+3x}{\ln(x)}$
2. Donner une primitive des fonctions suivantes :
   (a) $\frac{1}{x+1}$
   (b) $\frac{3}{(x+2)^2}$
   (c) $\sin(4x)$

♣ Exercice 8 : Intégrales.

Calculer les intégrales suivantes :

1. $\int_{-1}^{1}(3x^5 - 5x^3)\,\mathrm{d}x$
2. $\int_0^{\pi/6}\sin(x)\,\mathrm{d}x$
3. $\int_{-3}^{-1}\frac{\mathrm{d}x}{x}$
4. $\int_0^1 t\exp(t^2-1)\,\mathrm{d}t$
5. $\int_0^{\pi/6}\tan(\theta)\,\mathrm{d}\theta$
6. $\int_0^{\pi/2}\cos(2u)\sin(u)\,\mathrm{d}u$
7. $\int_0^{\pi/2} x\cos(x)\,\mathrm{d}x$ (indication : utiliser une intégration par parties)
8. $\int_1^2 x\ln(x)\,\mathrm{d}x$ (idem)

♣ Exercice 9 : Intégrales.

Résoudre les systèmes suivants pour $(x; y)$

1. $\begin{cases} x - 2y = 1 \\ 3x + 4y = 13 \end{cases}$
2. $\begin{cases} 3x + 5y = a \\ 2x - y = a^2 \end{cases}$ où a est un paramètre réel.

♣ Exercice 10 : Un peu de mathématiques pour la physique et la chimie !

Les questions qui suivent sont toutes indépendantes, elles sont extraites d'exercices que nous traiterons durant l'année. Mais ici, on s'intéresse seulement à la partie technique de ces questions, nous discuterons de la partie physique pendant l'année.

1. Déterminer le module et l'argument du nombre complexe suivant

$$Z = R + jL\omega + \frac{1}{\frac{1}{R} + jC\omega + \frac{1}{jL\omega}}.$$

2. La constante de vitesse d'une réaction chimique notée k dépend de la température T selon la relation $k = A\exp(-\frac{E}{RT})$ où toutes les constantes sont positives. À deux températures T_1 et T_2 on détermine $k_1 = A\exp(-\frac{E}{RT_1})$ et $k_2 = A\exp(-\frac{E}{RT_2})$. Déterminer l'expression de E en fonction de k_1, k_2, T_1, T_2 et R.
3. À quelle condition l'équation $x^2 - Dx + Df' = 0$, d'inconnue x, admet-elle des racines réelles ? Déterminer le signe de ces racines si D et f' sont des distances.
4. Déterminer les dérivées par rapport au temps suivantes : $\frac{\mathrm{d}(A\cos(\omega t+\varphi)}{\mathrm{d}t}$; $\frac{\mathrm{d}(\frac{1}{2}kx(t)^2)}{\mathrm{d}t}$ où A, ω, φ et k sont des constantes.
5. Transformer de deux façons différentes la somme suivante en produit : $\cos(\omega t + kx + \varphi) + \cos(\omega t - kx + \varphi)$. On utilisera la formule d'Euler en développant les exponentielles complexes d'une part, et d'autre part les formules trigonométriques.
6. Représenter les fonctions suivantes : $f(t) = \sin(\omega t - \frac{\pi}{6})$; $g(x) = \cos(3kx + \frac{\pi}{3})$.